ЛА Касапрян 17.12.12

Характеристични корени и собствени стойности на ЛО в крайномерно пространство Диагонализация на оператори и матрици С прост спектър

ТВ1|

Ако $f: U \to U$ е ЛО в n-мерно пространство U над F, то характеристичните корени на f от F съвпадат със собствените стойности на f

$$B = T^{-1} A T$$

$$f_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_n) = \det(A - \lambda E_n) = f_A(\lambda)$$

$$\lambda : \exists v \neq \vec{0} \text{ с } f(v) = \lambda v$$

ТВ2|

Ако $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$ са ЛНЗ-ни вектори на $f: V \to V$ отговарящи на собствена стойност λ_i при $1 \leq i \leq n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ са различни, то множеството v_i, където $1 \leq i \leq n$ е ЛНЗ-на система

Матрица и ЛО със свой спектър

Деф

$A \in M_{n \times n}(F)$ има прост спектър, ако притежава n различни характеристични корена от F

$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$ за различни $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$

Пример - ЛО $f: U \to U$ в n-мерно пространство U над F има прост спектър, ако матрицата ѝ спрямо някакъв базис на U има прост спектър

ТВ3 част 1|

Ако $f: U \to U$ е ЛО в n-мерно пространство U над F и f има прост спектър, то съществува базис $v_1, \dots, v_n$ на U, в който f има диагонална матрица $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ Всеки такъв базис $v_1, \dots, v_n$ се състои от собствени вектори на f, отговарящи на собствените стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

ТВ 3 част 2

Ако $A \in M_{n\times n}(F)$ е матрица с прост спектър, то съществува матрица $T \in M_{n\times n}(F)$, такава че $D = T^{-1}AT$ е диагонална.

Док-во част 1

Ако ℓ е с прост спектър, то по определение ℓ има n-различни характеристични корена $\lambda_1 - \lambda_n \in F$ съгласно ТВ1 ℓ има n-различни собствени стойности $\lambda_1 - \lambda_n$. По ТВ2, ако $v_1 - v_n$ са собствени вектори на ℓ отговарящи на собствените стойности $\lambda_1 - \lambda_n$ (различни), то $v_1 - v_n$ са ЛНЗ-ми от $\dim U = n$ и $v_1 - v_n \in U$ $\Rightarrow$ $v_1 - v_n$ е базис на U. Съгласно $\ell(v_i) = \lambda_i v_i$ за $1 \le i \le n$, матрицата на ℓ спрямо базиса $v_1 - v_n$ е следната:

$$D = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_i \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \ell(v_1) & \ell(v_i) & \ell(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_i & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Док-во част 2

Нека $A \in M_{n\times n}(F)$ има различни характеристични корена $\lambda_1 - \lambda_n \in F$. Разглеждаме линейно пространство U с базис $e = e_1 - e_n$ и линейният оператор $\ell: U \to U$ с матрица A, спрямо базиса e. Характеристичните корени на ℓ съвпадат с характеристичните корени на A, т.че ℓ има прост спектър. Съгласно условие 1, съществува базис $(v_1 - v_n) = V = eT \in U$ с матрица на прехода $T \in M_{n\times n}(F)$ от e към V, т.че ℓ има диагонална матрица $D = (\lambda_1 \; \lambda_n)$ спрямо базиса V. По трансформационните формули за матрица на ЛО при смяна на базиса $D = T^{-1}AT$

D - нова матрица, A - стара матрица, T - матрица на прехода

Деф

Нека V е ЛП с ЛО ℓ, $\ell: V \to V$. Подпространството W на V е ℓ-инвариантно, ако за всяко $w \in W$ имаме $\ell(w) \in W$ $\Leftrightarrow$ ℓ се ограничава до ЛО $\ell: W \to W$ в подпространството W

Примери

1) V е ℓ-инвариантно за произволен оператор $\ell: V \to V$

2) $\{\vec{0}_V\}$ е ℓ-инвариантно подпространство за всеки ЛО $\ell: V \to V$, тъй като $\ell(\vec{0}_V) = \vec{0}_V$

3) Нека $\ell: V \to V$ е ЛО, $\lambda \in F$, $U_\lambda(\ell) = \{u \in V \mid \ell(u) = \lambda u\}$ - твърдим че $U_\lambda(\ell)$ е ℓ-инвариантно подпространство на V. Ако λ е собствена стойност на ℓ, то $U_\lambda(\ell)$ е обединението на $\vec{0}_V$ със собствените вектори на ℓ отговарящи на ℓ. Ако λ не е собствена стойност на ℓ, то $U_\lambda(\ell) = \{\vec{0}_V\}$

Док-во

$U_\lambda(\ell)$ е подпространство на V, защото за $u_1, u_2 \in U_\lambda(\ell)$ $\mu \in F$ имаме $\ell(u_1+u_2) \overset{\ell е}{=} \ell(u_1) + \ell(u_2) = (\text{от } u_1, u_2 \in U_\lambda(\ell)) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1+u_2)$ и $\overset{\text{мн}}{\text{също}}$ така $\ell(\mu u_1) \overset{\ell е}{=} \mu \ell(u_1) = (\text{от } u_1 \in U_\lambda(\ell)) = \mu(\lambda u_1) = \lambda(\mu u_1)$ така че $u_1+u_2, \mu u_1 \in U_\lambda(\ell)$. За всяко $u \in U_\lambda(\ell)$ имаме образът на $\ell(u) = \lambda u \in U_\lambda(\ell)$, така че подпространството $U_\lambda(\ell)$ на V е ℓ-инвариантно, твърдим че $v \in V \setminus \{\vec{0}_V\}$ образува едномерно ℓ-инвариантно подпространство $\ell(v) \Leftrightarrow v$ е собствен вектор на ℓ!

Наистина ако $\ell(v)$ е ℓ-инвариантно подпространство то $\ell(v) \in \ell(v)$, тоест $\ell(v) = \lambda v$ за някое $\lambda \in F$ и v е собствен вектор на ℓ отговарящ на собствена стойност λ. И обратно - Ако $v \in V$ е собствен вектор на ℓ, отговарящ на собствена стойност λ, то подпространството $\ell(v)$ е ℓ-инвариантно, защото всеки елемент $\mu v \in \ell(v)$ този $\ell(v)$ се изобразява в $\ell(\mu v) = \mu \ell(v) = \mu(\lambda v) = (\mu\lambda)v \in \ell(v)$

Основна теорема на алгебрата

Всеки полином $f(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ има корен $\alpha \in \mathbb{C}$

Ако $\ell: U \to U$ е линеен оператор в n-мерно пространство U над $\mathbb{C}$, то характеристичният полином $f_\ell(\lambda) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ е от степен $n \geq 1$ и има корен $\lambda_1 \in \mathbb{C}$

Съгласно ТВ1 λ_1 е собствена стойност на ℓ. Произволен собствен вектор $v_1 \in U \setminus \{\vec{0}_V\}$, отговарящ на λ_1, поражда едномерно ℓ-инвариантно подпространство, което по-точно е $\ell(v)$. Това доказва

Следното твърдение

Тв1

Произволен ЛО $\varphi: U \to U$ в крайномерно пространство U над $\mathbb{C}$ има едномерно φ-инвариантно подпространство (задължително крайномерно)!

Тв2

Произволен ЛО $\varphi: U \to U$ в крайномерно пространство U над $\mathbb{R}$ има едномерно или двумерно φ-инвариантно подпространство

Док-во

Ако характеристичният полином $f_\varphi(\lambda) = f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) \in \mathbb{R}[\lambda]$ има реален корен λ_1, то λ_1 е собствена стойност и произволен собствен вектор $v_1 \in U \setminus \{\vec{0}_V\}$, отговарящ на λ_1, поражда едномерно φ-инвариантно подпространство $\mathcal{L}(v_1) \subseteq U$.

Тъй $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е матрицата на φ спрямо някакъв базис $e_1, \dots, e_n$ на U. Ще докажем че ако характеристичният полином $f_\varphi(\lambda) = f_A(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ има само комплексни нереални корени, то φ има двумерно φ-инвариантно подпространство

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{c}_{\sim} & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_0^{\mathbb{C}} \\ U & \xrightarrow[\sim]{c} & M_{n\times 1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \end{array}$$

Нека $c: U \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ е линейният изоморфизъм съпоставящ на вектор $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in U$. Координатният му стълб x съставен от $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Изображението φ_0 $\varphi_0: M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $\varphi_0(x) = Ax$ е ЛО в стълбовете $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ с реални коефициенти, защото $\varphi_0(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \varphi_0(x) + \varphi_0(y)$ и $\varphi_0(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda\varphi_0(x)$ за $x, y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Линейният оператор φ_0 има матрица A спрямо базиса $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Всяко реално число x_i може

да се разглежда като комплексно число, така че нашите изображения на стандартите с n-реални числа и n-комплексни. $M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}\mathbb{C}$

Линейно изображение $\ell_0^{\mathbb{C}} : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{C})$, $\ell_0^{\mathbb{C}}(z) = Az$ е линеен оператор в $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ продължаваме $\ell_0 : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, линейният оператор $\ell_0^{\mathbb{C}} : M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ в n-мерното пространство на $M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ над $\mathbb{C}$ има собствен вектор $w \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ отговарящ на собствена стойност $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Тук λ_0 е характеристичен корен на матрицата A на $\ell_0^{\mathbb{C}}$ спрямо базиса $\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$ така че $\lambda_0 = a + bi \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Оттук $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Разглеждаме

$$w = \begin{pmatrix} w_1 = u_1 + iv_1 \\ \vdots \\ w_n = u_n + iv_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} =$$

$u + iv$ за $u, v \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Тогава $\ell_0^{\mathbb{C}}(w) = \lambda_0 w$ е равносилно на $Aw = A(u+iv) = \ell_0^{\mathbb{C}}(w) = \lambda_0 w = (a+ib)(u+iv)$ $\Rightarrow (Au) + i(Av) = (au - bv) + i(av + bu)$. Сравняваме реалните и имагинерните части получаваме

$\left.\begin{aligned} Au &= au - bv \\ Av &= bu + av \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ следователно $\ell_{\mathbb{R}}(u,v)$ е ℓ_0-инвариантно подпространство на $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Оттук $\ell_{\mathbb{R}}(e_u, e_v)$ е ℓ-инвариантно подпространство на u

Остава да докажем че $\dim_{\mathbb{R}} \ell_{\mathbb{R}}(e_u, e_v) = \dim_{\mathbb{R}} \ell_{\mathbb{R}}(u,v) = 2$

Допускаме противното и разглеждаме нетривиална линейна комбинация $pu + qv = 0_{n\times 1}$ с $p, q \in \mathbb{R}$, $(p,q) \neq (0,0)$. След действие с ℓ_0 имаме

$\ell_0(pu + qv) = \ell_0(0_{n\times 1}) = 0_{n\times 1}$ но също

$pAu + qAv = b(pu + qv) \Rightarrow$

1) $p(au - bv) + q(bu + av) = 0_{n\times 1}$

2) $u(pa + qb) + (aq - pb)v = 0_{n\times 1}$

елиминираме v като умножим (1) с $(aq - pb)$ и (2) умножим с $(-q)$, след което съберем получените равенства и получаваме (3)

(3) $\left[p(aq - pb) + (pa + qb)(-q)\right]u = 0_{n\times 1}$

$\left[apq - p^2 b - apq - q^2 b\right]u = 0_{n\times 1}$

$-b(p^2+q^2)u = 0_{n\times 1}$. Понеже $b \neq 0$, $p^2+q^2 > 0$ т.е. $p^2+q^2 \neq 0$ оттук следва $u = 0_{n\times 1}$. Сега

$0_{n\times 1} = A0_{n\times 1} = Au = au - bv = -bv$ с $b \neq 0$ дава $v = 0_{n\times 1}$ и $w = u + iv = 0_{n\times 1}$. Това противоречи на определението за собствен вектор $w \in M_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n\times 1}\}$ на $\ell_0^{\mathbb{C}}$ и доказва че

$$\dim_{\mathbb{R}} \ell_{\mathbb{R}}(e_u, e_v) = 2$$